

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ CLUJ - 20.02.2026**

Barem clasa a VI-a

Din oficiu.....10p

Subiectul 1. (25 puncte)

a) Fie numerele naturale a și b , unde a este cel mai mic număr de trei cifre, iar b este cel mai mare număr de trei cifre, care împărțite la 15 dau restul 12, împărțite la 48 dau restul 45 și împărțite la 40 dau restul 37. Determinați numerele a și b .

b) Numerele naturale a și b împărțite la același număr natural n , dau resturile 9, respectiv 7. Determinați toate valorile posibile ale numărului n .

Soluție:

a) Fie m cel mai mic număr astfel încât:

$$\left. \begin{aligned} m &= 15 \cdot c_1 + 12 \mid + 3 \\ m &= 48 \cdot c_2 + 45 \mid + 3 \\ m &= 40 \cdot c_3 + 37 \mid + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m + 3 &= 15 \cdot (c_1 + 1) \\ m + 3 &= 48 \cdot (c_2 + 1) \\ m + 3 &= 40 \cdot (c_3 + 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m + 3 = [15, 48, 40] \Rightarrow m + 3 = 240 \Rightarrow m = 237 \dots\dots\dots 10p$$

$$\text{Scriem } M_{240} - 3 = \{237, 477, 717, 957, 1197 \dots\} \Rightarrow a = 237 \text{ și } b = 957 \dots\dots\dots 5p$$

$$\left. \begin{aligned} 237 &= n \cdot c_1 + 9 \mid - 9 \\ b) \ 957 &= n \cdot c_2 + 7 \mid - 7 \\ n &> 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 228 &= n \cdot c_1 \\ 950 &= n \cdot c_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n \in D_{(228, 950)} \dots\dots\dots 6p$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} n &\in D_{38} \\ n &> 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n \in \{19, 38\} \dots\dots\dots 4p$$

Subiectul 2. (25 puncte)

Se consideră numărul $N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2026$. Determinați cel mai mare număr natural k pentru care 10^k divide pe N .

Soluție:

$$N = (2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \dots (2 \cdot 1013) = 2^{1013} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1013 \dots\dots\dots 5p$$

Un număr este divizibil cu 10^k dacă este divizibil cu $2^k \cdot 5^k$ 3p

Numărul factorilor de 5 din 1013! :

202 de numere divizibile cu 5 de la 1 la 1013.....2p

40 numere divizibile cu 25 de la 1 la 10132p

8 numere divizibile cu 125 de la 1 la 10132p

un număr divizibil cu 625 de la 1 la 10132p

prin urmare sunt $202+40+8+1=251$ factori de 5 din 1013!2p

Cel mai mare număr natural k pentru care 10^k divide pe N este egal cu numărul factorilor de 10, adică minimul dintre numărul factorilor de 2 și de 5.....3p

Avem cel puțin 1013 factori de 2 și exact 251 factori de 5.....2p

Rezultă $k = 251$2p

Subiectul 3. (20 puncte)

Fie două numere naturale a și b astfel încât $a < b$, $a + b = 36$ și $\frac{[a, b]}{(a, b)} = 5$, unde $[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al celor două numere, iar (a, b) cel mai mare divizor comun. Determinați cele două numere.

Soluție:

Dacă $(a, b) = d \in \mathbb{N}$, atunci $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$, unde x și y sunt prime între ele.....5p

Atunci, $[a, b] = [d \cdot x, d \cdot y] = d \cdot x \cdot y$. Înlocuind în $\frac{[a, b]}{(a, b)} = 5$, obținem $\frac{d \cdot x \cdot y}{d} = 5$, deci $x \cdot y = 5$5p

Cum x și y sunt prime între ele și $x < y$ ($a < b$), obținem $x = 1$, $y = 5$5p

$a + b = 36 \Rightarrow d \cdot (x + y) = 36 \Rightarrow d = 6$, de unde obținem $a = 6$ și $b = 30$5p

Subiectul 4. (20 puncte)

Pe cercul C (O ; r) se consideră punctele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , în această ordine, astfel încât măsurile arcelor $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \widehat{A_3A_4}$ sunt direct proporționale cu numerele 2; 4 și 6, iar măsurile arcelor $\widehat{A_3A_4}, \widehat{A_4A_5}, \widehat{A_5A_1}$ sunt invers proporționale cu numerele 0,(6); 0,(3) și 0,25

a) Determinați măsurile arcelor $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \widehat{A_3A_4}, \widehat{A_4A_5}, \widehat{A_5A_1}$.

b) Dacă punctul M este simetricul punctului A_3 față de centrul cercului, iar N este mijlocul arcului $\widehat{A_5A_1}$ arătați că $\sphericalangle MON \equiv \sphericalangle A_1OA_3$.

Soluție:

a) $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \widehat{A_3A_4}$, sunt direct proporționale cu 2; 4; 6 $\Rightarrow \frac{\widehat{A_1A_2}}{2} = \frac{\widehat{A_2A_3}}{4} = \frac{\widehat{A_3A_4}}{6} = k$2p

$\widehat{A_1A_2} = 2k, \widehat{A_2A_3} = 4k, \widehat{A_3A_4} = 6k$1p

$\widehat{A_3A_4}, \widehat{A_4A_5}, \widehat{A_5A_1}$ sunt invers proporționale cu 0,(6); 0,(3) și 0,25 $\Rightarrow \frac{2\widehat{A_3A_4}}{3} = \frac{\widehat{A_4A_5}}{3} = \frac{\widehat{A_5A_1}}{4}$ 2p

Înlocuind pe $\widehat{A_3A_4} = 6k$ se obține, $\widehat{A_4A_5} = 12k$ și $\widehat{A_5A_1} = 16k$ 1p

$\widehat{A_1A_2} + \widehat{A_2A_3} + \widehat{A_3A_4} + \widehat{A_4A_5} + \widehat{A_5A_1} = 360^\circ$ 1p

$2k + 4k + 6k + 12k + 16k = 360^\circ \Rightarrow 40k = 360^\circ \Rightarrow k = 9^\circ$ 2p

$\widehat{A_1A_2} = 18^\circ, \widehat{A_2A_3} = 36^\circ, \widehat{A_3A_4} = 54^\circ, \widehat{A_4A_5} = 108^\circ, \widehat{A_5A_1} = 144^\circ$ 1p

b) Dacă M este simetricul punctului A_3 față de centrul cercului atunci $\widehat{A_3M} = 180^\circ$ 1p

Dacă N este mijlocul arcului $\widehat{A_5A_1}$ atunci $\widehat{A_5N} = \widehat{NA_1} = 72^\circ$ 2p

$\widehat{A_3M} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A_3A_4} + \widehat{A_4A_5} + \widehat{A_5M} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A_5M} = 180^\circ - (54^\circ + 108^\circ) = 18^\circ$ 1p

$\widehat{MN} = 72^\circ - 18^\circ = 54^\circ$ 2p

$\sphericalangle MON$ este unghi la centru $\Rightarrow \sphericalangle MON = \widehat{MN} = 54^\circ$ 1p

$\widehat{A_1A_3} = \widehat{A_1A_2} + \widehat{A_2A_3} = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$ 1p

$\sphericalangle A_1OA_3$ este unghi la centru $\Rightarrow \sphericalangle A_1OA_3 = \widehat{A_1A_3} = 54^\circ$ 1p

Prin urmare, $\sphericalangle MON \equiv \sphericalangle A_1OA_3$ 1p